MA2115 Clase 18: Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas

Elaborado por los profesores
Edgar Cabello y Marcos González

1 El método de variación de parámetros

Supongamos que tenemos una EDO lineal de orden n

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g$$

con $a_j(t)$, $1 \leq j \leq n-1$, y $g(t)$ funciones continuas en algún intervalo I. Supongamos, además, que $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la EDO homogénea asociada $L_n(y) = 0$. En la clase pasada, hemos visto que si $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{G}$ es el sistema de ecuaciones lineales asociado a $L_n(y) = g$, entonces las funciones vectoriales

$$\vec{X}_j = \begin{pmatrix} y_j \\ y_j' \\ \vdots \\ y_j^{(n-1)} \end{pmatrix} \qquad \text{para } 1 \leq j \leq n,$$

forman un conjunto fundamental de soluciones para el sistema $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{G}$. Podemos entonces considerar la la matriz fundamental

$$\Psi = \left(\vec{X}_1 | \vec{X}_2 | \ldots | \vec{X}_n\right)$$

y, en virtud del método de variación de parámetros, la solución general de $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{G}$ está dada por la fórmula

$$\vec{X}_g = \Psi \int \Psi^{-1} \vec{G} dt,$$

(donde $\int \vec{F} dt$ denota la operación de calcular la integral indefinida, o antiderivada, en cada coordenada de $\vec{F}$). Pero entonces la primera coordenada y_g, de dicha solución $\vec{X}_g$, es la solución general de la ecuación $L_n(y) = g$.

Recordemos, del curso de Algebra lineal (MA1116), que el cofactor de lugar (j, k) de la matriz fundamental Ψ, denotado por c_{jk}, está dado por $c_{j,k} = (-1)^{j+k}\psi(j|k)$, donde $\psi(j|k)$ denota el determinante de la matriz $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene al eliminar de Ψ la j-ésima fila y la k-ésima columna. Con esta notación, la solución general de la ecuación $L_n(y) = g$ es igual a

$$y_g = \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\int (-1)^{n+j} \frac{c_{nj}}{\det \Psi} g dt \right),$$

donde y_j, $1 \leq j \leq n$, son las soluciones de la ecuación homogénea $L_n(y) = 0$.

Es útil contar con una fórmula explícita para los casos particulares en los cuales $n = 2$. Consideremos la EDO lineal no homogénea de grado 2

$$a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t).$$

Supongamos que las funciones $a_j(t)$, $0 \leq j \leq 2$, y $f(t)$ son continuas en un intervalo abierto I y, además, $a_2(t) \neq 0$, para todo $t \in I$. Entonces, si $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de las EDO homogénea $a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0$, tenemos que la solución general de la ecuación $a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t)$ viene dada por

$$y_g(t) = -y_1(t)\int\left(\frac{y_2(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)}\right)\frac{f(t)}{a_2(t)}dt + y_2(t)\int\left(\frac{y_1(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)}\right)\frac{f(t)}{a_1(t)}dt. \tag{1}$$

Ejemplo 1 *Encuentre la solución general de la ecuación diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx} + y(x) = \tan x.$$

Solución: El polinomio característico asociado a la ecuación es $p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$, con lo cual las funciones $y_1(x) = \cos(x)$, $y_2(x) = \operatorname{sen}(x)$ forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea $y'' + y = 0$. Ahora usando la fórmula 1 y observando que $y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = \cos(x)\cos(x) + \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x) = \cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$, podemos calcular la solución general y_g de la ecuación $y'' + y = \tan x$ como sigue

$$\begin{aligned}
y_g(x) &= \cos(x)\int -\operatorname{sen}(x)\tan(x)dx + \operatorname{sen}(x)\int\cos(x)\tan(x)dx \\
&= \cos(x)\int -\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos(x)}dx + \operatorname{sen}(x)\int\operatorname{sen}(x)dx \\
&= \cos(x)\int -\frac{1-\cos^2(x)}{\cos(x)}dx + \operatorname{sen}(x)\left(-\cos(x) + c_2\right) \\
&= \cos(x)\int\left(-\sec(x) + \cos(x)\right)dx - \operatorname{sen}(x)\cos(x) + c_2\operatorname{sen}(x) \\
&= \cos(x)\left(-\ln|\sec(x) + \tan(x)| + \operatorname{sen}(x) + c_1\right)dx - \operatorname{sen}(x)\cos(x) + c_2\operatorname{sen}(x) \\
&= -\cos(x)\ln|\sec(x) + \tan(x)| + \cos(x)\operatorname{sen}(x) + c_1\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\cos(x) + c_2\operatorname{sen}(x) \\
&= -\cos(x)\ln|\sec(x) + \tan(x)| + c_1\cos(x) + c_2\operatorname{sen}(x).
\end{aligned}$$

Es decir, $y_g = -\cos(x)\ln|\sec(x) + \tan(x)| + c_1\cos(x) + c_2\operatorname{sen}(x)$. Observemos que $y_p(x) = -\cos(x)\ln|\sec(x) + \tan(x)|$ es una solucón particular de $y'' + y = \tan x$ mientras que $y_h(x) = c_1\cos(x) + c_2\operatorname{sen}(x)$ es la solución general de $y'' + y = 0$. $\square$

Ejemplo 2 *Encuentre la solución general de la ecuación diferencial*

$$x^2y'' - xy' + y = \frac{1}{x}, \qquad si\ x > 0,$$

sabiendo que las funciones $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = x\ln x$, forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación $x^2y'' - xy' + y = 0$.

Solución: Usando la fórmula 1 y observando que $y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = x\,(lnx + 1) - x\ln x = x > 0$, podemos calcular la solución general y_g de la ecuación $y'' + y = \tan x$ como sigue

$$
\begin{aligned}
y_g(x) &= -x\int \frac{x\ln x}{x}\frac{1/x}{x^2}dx + x\ln x\int \frac{1/x}{x^2}dx \\
&= -x\int \frac{\ln x}{x^3}dx + x\ln x\int \frac{1}{x^3}dx \\
&= x\left(\frac{1}{4x^2} + \frac{\ln x}{2x^2} + c_1\right) + x\ln x\left(\frac{-1}{2x^2} + c_2\right) \\
&= \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{2} + \ln x\right) - \frac{\ln x}{2x} + c_1x + c_2x\ln x \\
&= \frac{1}{4x} + c_1x + c_2x\ln x.
\end{aligned}
$$

Es decir, $y_g = \dfrac{1}{4x} + c_1x + c_2x\ln x$. Observemos que $y_p(x) = \dfrac{1}{4x}$ es una solucón particular de $x^2y'' - xy' + y = 1/x$, mientras que $y_h(x) = c_1x + c_2x\ln x$ es la solución general de $x^2y'' - xy' + y = 0$. $\square$

2 El método de los coeficientes indeterminados

Es esta sección presentamos un método para resolver ciertos tipos de ecuaciones diferenciales lineales haciendo uso de las propiedades de los operadores diferenciales asociados a una ecuación.

Recordemos que, para una ecuación de la forma $(D-\mu)^n y = 0$, donde μ es un número real cualquiera, las funciones $e^{\mu t}$, $te^{\mu t}$, $t^2e^{\mu t}, \ldots,$ $t^{n-1}e^{\mu t}$ forman un conjunto fundamental de soluciones, mientras que si $\mu = a + bi$ es un número complejo no real, las funciones de la forma $t^je^{at}\cos(bt)$ y $t^je^{at}\operatorname{sen}(bt)$, con $j < m$, forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación $[(D-\mu I)(D-\bar{\mu})]^m(y) = 0$ o $(D^2 - 2aD + (a^2+b^2)I)^m(y) = 0$. En suma, podemos afirmar que una función g es solución de una EDO lineal homogénea con coeficientes constantes si, y sólo si, g es una combinación lineal de funciones de esta forma $t^je^{at}\cos(bt)$ y $t^je^{at}\operatorname{sen}(bt)$.

Cuando una función g es solución de alguna EDO lineal homogénea con coeficientes constantes, es posible reducir el problema de hallar la solución de una EDO lineal no homogénea de la forma $L_n(y) = g$ a calcular un sistema de ecuaciones algebraicas lineales no homogéneas. En efecto, si $\tilde{L}(g) = 0$ para algún operador diferencial $\tilde{L}_m$, $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación $\tilde{L}_m(y) = 0$ y $\vec{b}$ es el vector de coordenadas de g con respecto a $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, entonces, por una parte, L_n conmuta con $\tilde{L}_m$, con lo cual $\tilde{L}_m(f) = 0$ implica que $\tilde{L}_m(L_n(f)) = L_n(\tilde{L}(f)) = 0$, es decir, L_n envía el subespacio de soluciones de $\tilde{L}_m(y) = 0$, $V_{\tilde{L}_m}$, en el mismo, y, por otra parte, $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ es una base de $V_{\tilde{L}_m}$, con la cual podemos describir la acción del operador lineal L_n en $V_{\tilde{L}_m}$, mediante una matriz $n\times m$ A, y reducir el problema $L_n(y) = g$ a resolver el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$. Este último sistema de ecuaciones produce todas las soluciones de la ecuación $L_n(y) = g$ siempre que los polinomios característicos de L_n y $\tilde{L}$ no tengan raíces comunes. Para tratar el caso general, observemos que, si y_l es una solución particular de la ecuación $L_n(y_l) = g_l$, para cada $1 \le l \le h$, entonces $\sum_{l=1}^h y_l$ es una solución particular de $L_n(y_l) = \sum_{l=1}^h g_l$. En consecuencia, basta con reosolver las ecuaciones no homogéneas de la forma $L_n(y) = g$, donde

g es solución de un ecuación de la forma $(D-\mu)^m(g)=0$. Por lo tanto, nuestro problema puede ser reducido a los siguientes casos:

Caso Real. $(D-\mu I)^m g(t)=0$, donde μ es un número real, es decir, $g(t)$ tiene la forma

$$e^{\mu t}\left(b_{m-1}t^{m-1}+b_{m-2}t^{m-2}+\cdots+b_1t+b_0\right),$$

donde b_j, $0\le j\le m-1$, son constantes reales. Supongamos, además, que μ es raíz del polinomio $p(\lambda)$ asociado a L_n, con multiplicidad n. Entonces, $L_n(y)=g$ tiene una solución particular de la forma

$$y_p(t)=t^n e^{\mu t}\left(c_{m-1}t^{m-1}+c_{m-2}t^{m-2}+\cdots+c_1t+c_0\right).$$

Entonces debemos hallar los valores de c_j, para cada $0\le j\le m-1$, a partir de las relaciones que se originan de substituir la expresión de y_p en la ecuación $L_n(y)=g$.

Caso Complejo. $(D^2-2aD+(a^2+b^2)I)\,g(t)=(D-\mu I)\,(D-\bar{\mu}I)^m g(t)=0$, donde $\mu=a+bi$ un número real, es decir, $g(t)$ tiene la forma

$$e^{at}\left[\left(b_{m-1}t^{m-1}+\cdots+b_1t+b_0\right)\cos(bt)+\left(c_{m-1}t^{m-1}+\cdots+c_1t+c_0\right)\operatorname{sen}(bt)\right],$$

donde b_j y c_j, $0\le j\le m-1$, son constantes reales. Supongamos, además, que μ es raíz del polinomio $p(\lambda)$ asociado a L_n, con multiplicidad n. Entonces, $L_n(y)=g$ tiene una solución particular de la forma

$$y_p(t)=t^n e^{at}\left[\left(d_{m-1}t^{m-1}+\cdots+d_1t+d_0\right)\cos(bt)+\left(e_{m-1}t^{m-1}+\cdots+e_1t+e_0\right)\operatorname{sen}(bt)\right].$$

En este caso, debemos hallar los valores de d_j y e_j, para cada $0\le j\le m-1$, a partir de las relaciones que se originan de substituir la expresión de y_p en la ecuación $L_n(y)=g$.

Ejemplo 3 *Hallar la solución general de la ecuación diferencial*

$$y''-5y'=x-2.$$

Solución: El polinomio característico de esta ecuación está dado por

$$p(\lambda)=\lambda^2-5\lambda=\lambda\,(\lambda-5).$$

Es decir, las raíces $p(\lambda)$ son $\lambda_1=0$ y $\lambda_2=5$. Por otra parte, $x-2$ es solución de la ecuación $D^2(y)=0$ (o equivalentemente, es anulado por el operador diferencial D^2). Por lo tanto, en este caso $\mu=0$ y, como 0 es raíz de $p(\lambda)$ de multiplicidad 1, una solución particular de $y''-5y'=x-2$ debe tener la forma

$$y_p(x)=x\,(a+bx)=ax+bx^2.$$

Ahora, como y_p satisface la ecuación diferencial $y''-5y'=x-2$, tenemos $(ax+bx^2)''-5(ax+bx^2)'=2b-5a-10bx$ es igual a $x-2$, de donde

$$\left\{\begin{array}{rcr} -5a+2b & = & -2\\ -10b & = & 1\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} a & = & 9/25\\ b & = & -1/10\end{array}\right.$$

y, por lo tanto, $y_p(x)=$ $\square$

Ejemplo 4 *Resolver la ecuación diferencial*

$$y^{iv} - 4y''' + 14y'' - 20y' + 25y = 0.$$

Solución: El polinomio característico de esta ecuación está dado por

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 14\lambda^2 - 20\lambda + 25 = \left(\lambda^2 - 2\lambda + 5\right)^2 = [\lambda - (1-2i)]^2[\lambda - (1+2i)]^2.$$

Es decir, $p(\lambda)$ tiene dos raíces complejas, $\mu = 1 - 2i$ y $\bar{\mu} = 1 + 2i$, ambas con multiplicidad 2. De acuerdo al teorema, las funciones

$$y_1(t) = e^t \cos(2t), \quad y_1(t) = te^t \cos(2t), \quad y_3(t) = e^t \operatorname{sen}(2t), \quad y_4(t) = te^t \operatorname{sen}(2t),$$

forman un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación dada y, en consecuencia, la solución general de dicha ecuación está dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^t \cos(2t) + c_2 te^t \cos(2t) + c_3 e^t \operatorname{sen}(2t) + c_4 te^t \operatorname{sen}(2t) \\ &= (c_1 + c_2 t)\, e^t \cos(2t) + (c_3 + c_4 t)\, e^t \operatorname{sen}(2t) \end{aligned}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. □

Ejemplo 5 *Resolver la ecuación diferencial*

$$y'' + 6y' + 13y = 4e^{-3x}.$$

Solución: El polinomio característica asociado es $p(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 13 = (\lambda + 3 - 2i)(\lambda + 3 + 2i)$, con lo cual las raíces características son $\lambda_1 = -3 + 2i$, $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = -3 - 2i$, y la solución de la ecuación homogénea es: $y_h = c_1 e^{-3x} \cos(2x) + c_2 e^{-3x} \operatorname{sen}(2x)$. Como e^{-3x} no aparece entre los sumandos de y_h, podemos hallar una solución de la forma $y_p = ae^{-3x}$, pero

$$y_p'' + 6y_p' + 13y_p = 4e^{-3x} \Longleftrightarrow (9a - 18a + 13a)e^{-3x} = 4e^{-3x} \Longleftrightarrow 4a = 4 \Longleftrightarrow a = 1.$$

Así, $y_p = e^{-3x}$ y la solución general de la ecuación no-homogénea está dada por

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-3x} \cos(2x) + c_2 e^{-3x} \operatorname{sen}(2x) + e^{-3x}.$$

Ejemplo 6 *Resolver la ecuación diferencial*

$$y'' - 3y' + 2y = x + 8e^{2x}. \qquad (*)$$

Solución: El polinomio característico es $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$, de modo que las raíces características son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y, en consecuencia, la solución general de la ecuación homogénea asociada es $y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Ahora bien, para encontrar una solución particular y_p de la E.D.O. (*), es conveniente encontrar y_1 y y_2 tales que

$$\begin{aligned} y_1'' - 3y_1' + 2y_1 &= x \quad \text{y} \\ y_2'' - 3y_2' + 2y_2 &= 8e^{2x}\ , \end{aligned}$$

con lo cual $y_p = y_1 + y_2$ es una solución particular.

A) $y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = x$: Buscamos una solución de la forma $y_1 = ax + b$. Sustituyendo, tenemos que $-3a + 2ax + b = x$, de donde $b - 3a = 0$ y $2a = 1 \iff a = \dfrac{1}{2}$ y $b = \dfrac{3}{2}$. Es decir, $y_1 = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

B) $y_2'' - 3y_2' + 2y_2 = 8e^{2x}$: Buscamos una solución de la forma $y_2 = cxe^{2x}$, ya que 2 es una raíz característica. Por lo tanto:

$$
\begin{array}{rcl}
2y_2 & = & 2cxe^{2x} \\
-3y_2' & = & -3ce^{2x} - 6cxe^{2x} \\
y_2'' & = & 2ce^{2x} + 2ce^{2x} + 4cxe^{2x} \\
\hline
8e^{2x} & = & ce^{2x} \quad \Longrightarrow \quad c = 8
\end{array}
$$

Así, $y_2 = 8e^{2x}$.

Usando (A) y (B), tenemos que $y_p = y_1 + y_2 = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2} + 8e^{2x}$. Por lo tanto, la solución general de la E.D.O. es

$$
y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + 8e^{2x} \ .
$$

Ejemplo 7 *Resolver el problema con valores iniciales*

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} y'' - 3y' + 2y & = & 6e^{-x} - 10\cos x \\ y(0) = 1, & & y'(0) = 2. \end{array} \right.
$$

Solución: El polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$, con lo cual la solución general del homogéneo asociado es: $y_h = c_1e^x + c_2e^{2x}$. Por otra parte, las funciones e^{-x} y $\cos x$ son soluciones típicas cuando aparecen los autovalores -1 e i, respectivamente. Como -1 e i no son raíces de $p(\lambda)$, existe una solución y_p, para la ecuación no homogénea, de la forma $y_p = Ae^{-x} + B\cos x + C\,\mathrm{sen}\,x$. Ahora calcularemos A, B y C, usando el hecho que $y_p'' - 3y_p' + 2y_p = 6e^{-x} - 10\cos x$: como

$$
\begin{array}{rcl}
2y_p & = & 2Ae^{-x} + 2B\cos x + 2C\,\mathrm{sen}\,x \\
-3y_p' & = & 3Ae^{-x} + 3B\,\mathrm{sen}\,x - 3C\cos x \\
y_p'' & = & Ae^{-x} - B\cos x - C\,\mathrm{sen}\,x \\
\hline
y_p'' - 3y_p' + 2y_p & = & 6Ae^{-x} + (B - 3C)\cos x + (3B + C)\,\mathrm{sen}\,x,
\end{array}
$$

comparando coeficientes con $6e^{-x} - 10\cos x$, obtenemos

$$
\left\{ \begin{array}{lcl} 6A & = & 6 \\ B - 3C & = & -10 \\ 3B + C & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} A & = & 1 \\ B & = & -1 \\ C & = & 3 \end{array} \right.
$$

Por lo tanto, $y_p = e^{-x} - \cos x + 3\,\mathrm{sen}\,x$, y la solución general de la ecuación no lineal está dada por

$$
y = y_h + y_p = c_1e^x + c_2e^{2x} + e^{-x} - \cos x + 3\,\mathrm{sen}\,x.
$$

Usando ahora la condición inicial $y(0) = 1$, vemos que $1 = c_1 + c_2 + 2$. Por otra parte, usando la condición inicial $y'(0) = 2$ en $y' = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} - e^{-x} - \operatorname{sen} x - 3\cos x$, vemos que $2 = c_1 + 2c_2 - 4$. En suma,

$$\left\{\begin{array}{lcl} c_1 + c_2 & = & -1 \\ c_1 + 2c_2 & = & 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} c_1 + c_2 & = & -1 \\ c_2 & = & 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} c_1 & = & -4 \\ c_2 & = & 3 \end{array}\right. ,$$

y, finalmente, la solución del problema con valores iniciales es:

$$y = -4e^x + 3e^{2x} + e^{-x} - \cos x + 3\operatorname{sen} x.$$